

Hanojské věže

Interdisciplinární hádanka

RADEK
PELÁNEK

Hanojské věže jsou zdánlivě jednoduchý dřevěný hlavolam vhodný pro trénink myšlení dětí. Ovšem málokterý hlavolam se dostane do učebnic, natožpak do učebnic dvou tak odlišných oblastí, jako je psychologie a programování. A málokterý hlavolam, který se vyskytuje v základních učebnicích, skrývá nevyřešené matematické problémy. Ale vezměme to od začátku, nebo v tomto případě spíše od konce, tedy od konce světa.

Kdesi v horách nedaleko Hanoje prý¹ od dávných věků stojí chrám, ve kterém je velká místnost, v ní jsou tři kolíky a na nich je nasazeno celkem 64 zlatých disků různých velikostí. Mniši přesouvají tyto zlaté disky podle posvátných pravidel, a až se jim podaří přemístit všechny disky z prvního kolíku na třetí, nastane konec světa.

Pravidla jsou jednoduchá. Disky je povoleno přesouvat pouze po jednom a vždy můžeme vzít pouze horní disk z některého kolíku a přemístit jej na jiný kolík, přičemž nikdy nesmíme položit větší disk na menší (obr. 1). Postup řešení zde nebudeme detailně rozebírat,² raději se podíváme na mezioborové souvislosti této úlohy.

Jak lidé myslí

První oblastí, kde hrají Hanojské věže důležitou roli, je kognitivní věda. Herbert Simon, jeden z průkopníků této oblasti, nabízí následující srovnání: „Pokud šachy hrají v kognitivním výzkumu podobnou roli jako *Drosophila* v genetice, Hanojské věže představují analogii *E. coli*, poskytující další standardizovaný model, kolem kterého se mohou kumulovat vědomosti.“

Hanojské věže se využívají pro zkoumání toho, jak lidé řeší problémy. Zkoumá se zlepšování dovedností vlivem tréninku, přenos znalostí mezi úlohami či myšlení pacientů s poškozením mozku. Konkrétně se například studuje vliv formulace zadání na způsob a obtížnost řešení problému. K tomu se využívají „izomorfní zadání“, ve kterých vystupují skákající akrobati, čajové rituály, vrstvy nátěrů barvy na nábytku nebo příšery měnící velikost koulí (viz rámeček „Příšery

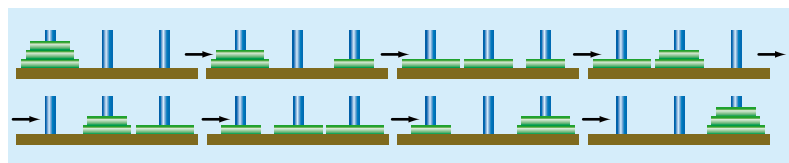
PŘÍŠERY A GLÓBUSY

Tři příšery drží tři koule. Jak příšery, tak koule jsou ve třech velikostech: malá, střední, velká. Malá příšera drží velkou kouli, střední příšera drží malou kouli a velká příšera drží středně velkou kouli. Toto uspořádání však uráží smysl příšer pro symetrii, a tak by chtěly situaci změnit do stavu, kdy každá příšera bude držet kouli své velikosti. Příšery mohou měnit velikost koulí, ale musí při tom dodržovat pravidla etikety příšer: 1. Vždy se může měnit velikost pouze jedné koule. 2. Pokud dvě příšery drží koule stejné velikosti, jen koule, kterou drží větší příšera, se může změnit. 3. Koule se nikdy nesmí změnit na stejnou velikost jako koule, kterou drží větší příšera.

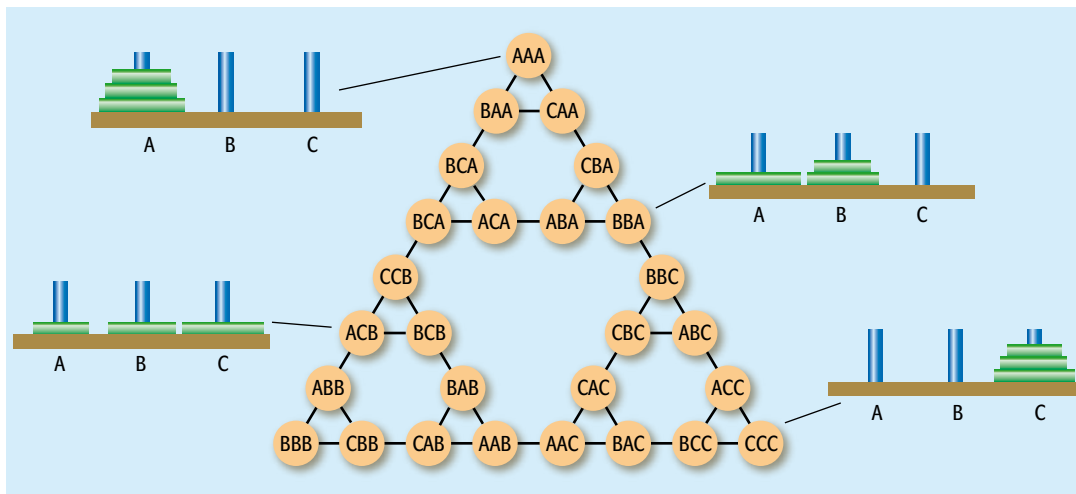
ry a glóbusy“). Ve všech případech je zadání formulováno tak, že problém je izomorfní původnímu zadání Hanojských věží, tj. když odhlédneme od „příběhové omáčky“, je stavový prostor platných tahů stejný jako stavový prostor klasických Hanojských věží (obr. 2). Pro lidi však není úplně snadné tento izomorfismus odhalit a obtížnost jednotlivých zadání se výrazně liší. Úloha uvedená v rámečku trvá lidem průměrně šestnáctkrát déle než základní zadání. Proč? Roli hraje způsob, jak lidé přemýšlejí o problémech, využívají omezenou pracovní paměť a další faktory – prostě úloha poskytuje dostatek podkladů pro zajímavý kognitivní výzkum.

Experimenty s izomorfními zadáními bychom však mohli dělat s ledajakou úlohou. Čím jsou zrovna Hanojské věže zajímavé? Především svým „zanořeným“ charakterem. Podobně jako matřjoška, kterou otevřeme, abychom našli další matřjošku, zjistíme při řešení Hanojských věží pro n disků, že potřebujeme vyřešit Hanojské věže pro $n-1$ disků. Abychom mohli přesunout spodní disk, musíme nejdříve přesunout disky nad ním, což vlastně odpovídá trochu jednodušší verzi zadání. Při řešení využíváme takzvanou „analýzu prostředků a cílů“, což je jeden z obecných způsobů, jakým lidé řeší problémy. Příklad ze života: chci jet lyžovat (cíl), na hory se mohu dostat vlakem (podcíl), abych mohl jet vlakem, musím na nádraží (pod-

1. Nejkratší řešení úlohy pro 3 disky.



Mgr. Radek Pelánek, Ph.D., (*1980) vystudoval Fakultu informatiky Masarykovy univerzity v Brně. V současné době působí také jako odborný asistent a zkoumá mimo jiné to, jak lidé a počítače řeší logické úlohy. Zabývá se také zážitkovou pedagogikou a je autorem knih „Příručka instruktora zážitkových akcí“ (Portál, 2008) a „Zážitkové výukové programy“ (Portál, 2010).



2. Stavový prostor úlohy se třemi disky. Skládá se ze tří opakujících se stejných částí, které odpovídají stavovému prostoru pro dva disky.

podcíl), na které se dostanu tramvají (prostředek). Exaktně studovat, jak lidé přemýšlejí o cestě na hory, je ovšem náročné, a tak psychologové rádi sáhnou po Hanojských věžích.

Ovšem nejen psychologové. Techniku „analýza prostředků a cílů“ uvedli do obecného povědomí dva průkopníci umělé inteligence: již zmíněný Herbert Simon³ spolu s Allanem Newellem. Tuto techniku využili jako základ svého programu *General Problem Solver*, což byl jeden z prvních vážnějších pokusů o vybudování umělé inteligence v padesátých a šedesátých letech. Hanojské věže byly jedním z problémů, na kterých byl tento program vyvíjen, testován a srovnáván s lidmi.

Rekurze aneb Volání sebe sama

Tím se dostáváme k informatice a programování – informatický termín pro zmíněnou zanořenou strukturu problému je rekurze (což znamená „volání sebe sama“). Řešení úlohy pro n disků totiž můžeme zapsat programem na 5 řádků pomocí rekurzivního volání téhož programu pro $n-1$ disků, a právě díky tomuto jednoduchému elegantnímu zápisu se Hanojské věže často používají při výuce programování. Stejně jako řešení úlohy má i stavový prostor⁴ úlohy rekurzivní charakter (obr. 2).

Stavový prostor tvoří spojnicí k matematice a k dalším strukturám, které jsou definovány rekurzivně. S rostoucím počtem disků začíná obrázek stavového prostoru nápadně

připomínat Sierpiňského fraktál (obr. 3), což je geometrický útvar, který vzniká rekurzivní procedurou. Začneme s plným trojúhelníkem, rozdělíme ho na 4 identické malé trojúhelníky, prostřední vyřizneme a na zbylé tři aplikujeme rekurzivně stejný postup. Obrázek ilustruje první 4 kroky tohoto postupu. Sierpiňského fraktál vznikne po provedení nekonečného počtu uvedených rekurzivních kroků. To sice není úplně praktický postup, nicméně z matematického pohledu je výsledek takové operace dobře definovaný a výsledný objekt má mnoho zajímavých vlastností.⁵ Souvislost mezi stavovým prostorem Hanojských věží a Sierpiňského fraktálem není jen na úrovni podobně vypadajících obrázků – lze ji přesně popsat, a dokonce můžeme i dokázat vlastnosti jednoho z těchto objektů pomocí druhého. Tak například s využitím této analogie bylo dokázáno, že průměrná vzdálenost dvou bodů v Sierpiňského fraktálu se základnou 1 je $466/885$.⁶

Jinou zajímavou a nečekanou souvislostí je známý Pascalův trojúhelník (obr. 4). Ten lze také vyjádřit pomocí rekurzivního vztahu a právě tato rekurze tvoří spojovací můstek se stavovým prostorem Hanojských věží a Sierpiňského fraktálem. Pokud si totiž v Pascalově trojúhelníku obarvíme lichá čísla, dostaneme opět povědomý obrázek. Čím víc řádků obarvíme, tím bude podobnější Sierpiňského fraktálu.

Problém, který stojí za útok

Kromě uvedených známých matematických výsledků a spojitostí však Hanojské věže skrývají i matematické problémy, jejichž řešení stále není známo. Co se stane, když místo tří kolíků použijeme čtyři? Vyřešit úlohu je pak samozřejmě jednodušší, protože prostě máme více volnosti při řešení. Jenomže správného matematika nezajímá jenom řešení úlohy, ale *nejlepší řešení*. Kolik nejméně tahů potřebujeme na vyřešení úlohy s n dis-

Abstract: Towers of Hanoi by Radek Pelánek. Interdisciplinary puzzle The Towers of Hanoi is a seemingly simple logic puzzle. Nevertheless, its applications span several diverse research areas – it is a test bed in cognitive psychology, a teaching aid in computer science, and it even incorporates a difficult open problem in mathematics.

1) Ve skutečnosti hádanka pochází z 19. století a autorem je francouzský matematik Édouard Lucas. Nicméně tato legenda tvoří tradičně nedílnou součást zadání.

2) Čtenáři, který úlohu nezná, doporučujeme, aby si vyzkoušel úlohu vyřešit pro 4 disky. V případě nedostatku zlatých disků lze použít například mince.

3) Těžko zařadit Herberta Simona do jedné disciplíny. Kromě toho, že stál u základů umělé inteligence a věnoval se kognitivní psychologii, dostal třeba také Nobelovu cenu za ekonomii.

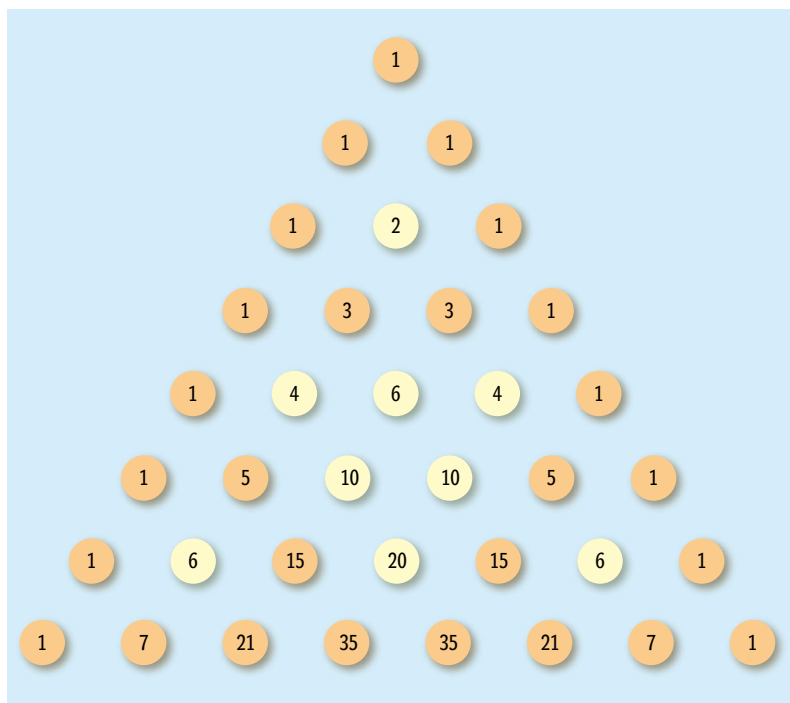
4) Stavový prostor zachycuje všechny možné konfigurace problému a přechody mezi nimi.

5) Výsledný fraktál například není – na rozdíl od vyplněného trojúhelníku, s nímž jsme začínali – dvourozměrný útvar, ale jednorozměrná křivka, která má navíc tu vlastnost, že protíná sama sebe v každém bodě.

6) Ian Stewart o tomto číslu říká, že by je každý měl mít na „seznamu čísel, která jsou důležitější, než vypadají“, společně s π , e , zlatým řezem a dalšími.

3. Sierpiňského fraktál vznikne po nekonečném počtu opakování naznačeného rekurzivního postupu.





4. Pascalův trojúhelník tvoří kombinační čísla $\binom{n}{k}$. Takové číslo udává počet možností jak vybrat k prvků z n prvkové množiny. Pro tato čísla platí rekurzivní vztah $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

ky? Pro zadání s 3 kolíky je odpověď známa – optimálního výsledku dosahuje základní rekurzivní řešení a potřebný počet tahů je $2^n - 1$.⁷ Pro zadání se 4 disky existuje algoritmus,⁸ o kterém si většina matematiků myslí, že dává optimální řešení, nikdo to však neumí dokázat. Zatím bylo pouze pomocí systematického počítačového prohledávání ověřeno řešení pro 30 a méně disků.

Paul Erdős, jeden z největších matematiků 20. století, prohlásil: „Problémy, které stojí za útok, prokážou svoji cenu tím, že útok opětuji.“ Hanojské věže, i přes svou jednoduchost, svoji cenu rozhodně prokázaly. ∞

7) Z čehož mimo jiné plyne, že s tím koncem světa to nebude až tak aktuální. I kdyby menší přenesli 1 disk za vteřinu, tak se 64 disky dokončí úlohu za 580 miliard let, což je 40krát delší období než dosavadní stáří vesmíru.

8) Tzv. Frame-Stewartův rekurzivní algoritmus.

Zelená síť Krušné hory

Vytvoření přeshraničních synergií mezi oblastmi Natura 2000 a rozvojem venkova v Krušnohoří, projekt programu Cíl 3

Lead Partner: Leibniz Institut für Ökologische Raumentwicklung v Drážďanech – Dr. Markus Leibenath, Partner v ČR: Fakulta životního prostředí Univerzity J. E. Purkyně v Ústí nad Labem – Ing. Martin Neruda, Ph.D.

V Krušných horách na obou stranách hranice se vyskytují cenná přírodní území patřící do soustavy Natura 2000. Ty spolu vzájemně sousedí a prolínají se, čímž vznikají velké komplexy chráněných oblastí s vysokým potenciálem rozvoje. Kvalita životního prostředí získává stále větší význam a pozitivně ovlivňuje konkurenceschopnost regionu. Tak mohou chráněné oblasti přírody přispívat k udržitelnému venkovskému rozvoji a zabezpečit nová pracovní místa, např. v rámci rozvoje turistiky a ekologické výchovy. I když má zemědělství pro krušnohorský region pouze malý hospodářský význam, je významným činitelem „tvorby a údržby krajiny“. Unikátní přírodní struktura krušnohorského hřebenového regionu představuje také strategickou pozici



pro úspěch turistiky a ekologické výchovy. Stále oblíbenější turistika nabízí možnosti poznávání krásné krajiny. Zejména intenzivnější spolupráce obyvatel po obou stranách Krušných hor nabízí nové a doposud nevyužité možnosti.

Projekt si klade za cíl poukázat na synergie mezi ochranou přírody, zemědělstvím, vývojem venkova a turistikou. Projekt také přispěje ke zlepšení trvalých přeshraničních kooperačních vztahů. Zájmová oblast je tvořena oblastmi Krušných hor ve Svobodném státě Sasko (okresy Saské Švýcarsko – východní Krušnohoří, Střední Sasko a Krušnohorský okres) a v České republice (Ústecký a Karlovarský kraj). S pomocí SWOT analýzy budou zjištěny přednosti a nedostatky, šance a rizika a také zdůrazněny funkce, popř. potenciály oblastí Natura 2000. Ekologické výzkumy jsou zaměřené na botanický, zoologický a hydrologický průzkum vybraných lokalit.

V úzkém dialogu s relevantními aktéry budou vypracovány koncepty strategií a opatření. Jejich zaměření je na zlepšení zapojení Natury 2000 do rozvoje venkova při zohlednění výše uvedených hlavních bodů (zemědělství, turistika a environmentální výchova). Smysluplné propojení ochrany přírody, turistiky, zemědělského využití krajiny a environmentální výchovy má zlepšit pochopení obyvatel. V rámci projektu proběhla zahajovací konference na FŽP UJEP v Ústí nad Labem v loňském roce a letos na jaře série 2 workshopů v Altenbergu a Annabergu. Na workshopech se diskutovaly praktické zkušenosti aktérů z oblasti ochrany přírody, ekologické výchovy, turistiky a zemědělství. Další menší pracovní workshopy věnované vždy jednomu problému jsou plánovány v blízké době.